

## 平成31年度 入学試験問題

### 数 学 問 題 用 紙 (前 期)

試験時間	90分
問題用紙	1～8頁

#### 注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り、鞆の中にしまうこと。
5. 机上には、受験票と筆記用具（鉛筆、シャープペンシル、消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓、コンパス、定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問、トイレ、体調不良等で用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は、問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後、解答用紙は裏返し、問題用紙は持ち帰ること。

受験番号	
------	--

氏名	
----	--

[ I ]  $a$  を  $a \neq 0, -1$  を満たす実数とする。O を原点とする  $xy$  平面上において次の 2 つの曲線を考える：

$$C_1 : x^2 - y^2 = 1, \quad C_2 : y = ax^2 - \frac{3}{2a+2}$$

以下の各問いの答えのみを解答欄に記入せよ。

問 1  $a = 1$  のとき、 $C_1$  と  $C_2$  の共有点の座標をすべて求めよ。

問 2  $C_1$  と  $C_2$  が相異なる 4 点で交わるための  $a$  に対する必要十分条件を求めよ。

問 3  $C_1$  と  $C_2$  が相異なる 4 点で交わる時、それら 4 点すべてを通る円の中心の座標を  $a$  を用いて表せ。また、その円の半径を  $r$  とするとき、以下の空欄に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。

$$r = \sqrt{\frac{-a^3 - a^2 + \boxed{\text{ア}}a + \boxed{\text{イ}}}{a^{\boxed{\text{ウ}}}(a + \boxed{\text{エ}})}}$$

(計算用紙)

[ II ] 空間において1点  $O$  をとり, 相異なる4点  $P, A, B, C$  を頂点とする四面体  $PABC$  について考える。四面体  $PABC$  は点  $O$  を中心とする半径が1の球に内接しており, 三角形  $ABC$  は1辺の長さが  $l$  の正三角形であると仮定する。

問1  $l$  の取り得る値の範囲を答えよ。答えのみでよい。

問2  $s = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ ,  $t = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}$  とおき, 点  $P$  から三角形  $ABC$  を含む平面に垂線  $PH$  を下ろす。このとき,  $\overrightarrow{AH}$  を  $l, s, t$  を用いて  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  の1次結合で表せ。

問3 問2において  $l$  を固定し, 点  $P$  が  $2s - t = l^2$  を満たしながら点  $O$  を中心とする半径1の球面上を動くとき, 四面体  $PABC$  の体積の最大値  $V(l)$  を求めよ。

(計算用紙)

[III]  $f(x) = \log(1+x^2)$  ( $x > 0$ ) とする。また、実数  $a, h$  は

$$0 < a < 1, \quad 0 < h < 1, \quad 0 < a + h < 1$$

を満たすとする。以下の各問いに答えよ。

問1  $k$  を正の実数とする。このとき、以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{1}{k+1} \frac{x^2}{2} \quad (0 \leq x \leq k)$$

問2 各  $a, h$  に対して、以下の等式を満たす  $c$  ( $a < c < a+h$ ) がただ1つ存在することを示せ。

$$f(a+h) = f(a) + f'(c)h$$

また、 $d$  を以下のように定めたとき、 $c$  を  $d$  を用いて表せ。

$$d = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

問3 問2において  $a$  を固定し、 $c$  を  $h$  の関数と考えて  $c(h)$  と書くことにする。また、 $\theta(h)$  を以下のように定める。

$$\theta(h) = \frac{c(h) - a}{h}$$

このとき、極限  $\lim_{h \rightarrow 0+0} \theta(h)$  を求めよ。ただし、記号  $\lim_{h \rightarrow 0+0}$  は  $h > 0$  の範囲で  $h$  を 0 に限りなく近づけたときの極限を意味する。

( 計 算 用 紙 )

[IV] 関数  $f(x)$  は 2 回微分可能で、その 2 次までの導関数  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  はいずれも連続とし、すべての実数  $x$  に対して  $f''(x) \geq 0$  を満たすとする。 $xy$  平面上の曲線  $C: y = f(x)$  上の点  $P(t, f(t))$  における法線上に点  $Q(a, b)$  を  $PQ = 1$ ,  $b < f(t)$  を満たすようにとるとき、以下の各問いに答えよ。

問 1  $\overrightarrow{PQ}$  を求めよ。答えのみでよい。

問 2  $a, b$  を  $t$  の式で表せ。答えのみでよい。

問 3 問 2 の  $a, b$  をそれぞれ  $a(t), b(t)$  と表すとき、 $b'(t) = f'(t)a'(t)$  が成り立つことを示せ。

問 4  $T_1, T_2$  は  $T_1 < T_2$  を満たす実数とする。 $t$  が  $T_1$  から  $T_2$  まで変化するとき、2 点  $P, Q$  が描く曲線の長さをそれぞれ  $L_P(T_1, T_2), L_Q(T_1, T_2)$  で表す。 $L_Q(T_1, T_2)$  と  $L_P(T_1, T_2)$  の差を  $\Delta L(T_1, T_2)$  とする：

$$\Delta L(T_1, T_2) = L_Q(T_1, T_2) - L_P(T_1, T_2)$$

このとき次が成り立つことを示せ。

$$\Delta L(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

問 5 問 4 までの結果を踏まえて、関数  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  に対して、 $\Delta L(T_1, T_2)$  において同時に  $T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow +\infty$  としたときの極限值

$$\lim_{T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow +\infty} \Delta L(T_1, T_2)$$

を求めよ。



(計算用紙)